

Presque-réductibilité des cocycles quasi-périodiques de classe Gevrey 2

Claire Chavaudret

Institut de Mathématiques de Jussieu

1 Introduction

1.1 Présentation du résultat

Soit $n \geq 1$, $d \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}^d$ et $0 < \kappa < 1$, $\tau > \max(1, d - 1)$. Supposons que ω est diophantien de constante κ et d'exposant τ , c'est-à-dire que

$$\forall m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \quad |\langle m, \omega \rangle| \geq \frac{\kappa}{|m|^\tau} \quad (1)$$

On peut aussi supposer sans perte de généralité que $\sup |\omega_i| \leq 1$. On note $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ le tore et $2\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / (2\mathbb{Z}^d)$ le double tore.

Définition: Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie, G le groupe de Lie associé à \mathcal{G} et $A : 2\mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{G}$. Le cocycle quasi-périodique associé à A est la fonction $X : 2\mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \rightarrow G$ telle que pour tous $(\theta, t) \in 2\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} X^t(\theta) = A(\theta + t\omega) X^t(\theta); \quad X^0(\theta) = Id \quad (2)$$

On dit que c'est un cocycle constant si A est constante.

Remarque: Le terme quasi-périodique vient du fait que A est la fonction enveloppe d'une fonction quasi-périodique. En effet, pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$, $t \mapsto A(\theta + t\omega)$ est une fonction quasi-périodique.

Un cocycle constant est toujours de la forme $t \mapsto e^{tA}$.

Définition: Soit $r > 0$. Soit E un sous-ensemble de $gl(n, \mathbb{C})$. Notons $C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, E)$ (resp. $C_r^{G,2}(\mathbb{T}^d, E)$) les fonctions de classe Gevrey deux de paramètre r sur $2\mathbb{T}^d$ (resp. \mathbb{T}^d) à valeurs dans E , c'est-à-dire les fonctions $f \in C^\infty(2\mathbb{T}^d, E)$ (resp. $C^\infty(\mathbb{T}^d, E)$) telles qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$,

$$\sup_{\theta \in 2\mathbb{T}^d} |\partial^\alpha f(\theta)| \leq Cr^{-2|\alpha|} (\alpha!)^2 \quad (3)$$

où on a noté $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$. Notons $\|f\|_r$ la norme Gevrey de f , c'est-à-dire

$$\|f\|_r = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d} r^{2|\alpha|} \frac{1}{(\alpha!)^2} \sup_{\theta \in 2\mathbb{T}^d} \|\partial^\alpha f(\theta)\| \quad (4)$$

Notation : Pour toute fonction $f \in C^1(2\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$, on notera pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$

$$\partial_\omega f(\theta) = \frac{d}{dt} f(\theta + t\omega)|_{t=0} \quad (5)$$

la dérivée de f dans la direction ω .

Définition: Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie et G le groupe de Lie associé à \mathcal{G} . Soient $r, r' > 0$ et $A, B \in C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$. On dit que A et B sont *conjugués dans* $C_{r'}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$ s'il existe $Z \in C_{r'}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$ tel que pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega Z(\theta) = A(\theta)Z(\theta) - Z(\theta)B(\theta)$$

Si B est constante en θ , on dit que A est *réductible dans* $C_{r'}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$, ou *réductible par* Z *à* B .

Remarque: Soit X le cocycle quasi-périodique associé à A . La fonction A est réductible par Φ à A_0 si et seulement si

$$\forall(t, \theta), \quad X^t(\theta) = \Phi(\theta + t\omega)^{-1} e^{tA_0} \Phi(\theta) \quad (6)$$

La réductibilité équivaut aussi au fait que l'application de $2\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^n$ dans lui-même :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta + \omega \\ X^1(\theta)v \end{pmatrix} \quad (7)$$

soit conjuguée à une application χ telle que

$$\frac{d\chi}{d\theta} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Le but de cet article est de montrer que pour

$$G = GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), Sp(n, \mathbb{R}), O(n), U(n)$$

au voisinage d'un cocycle constant, tout cocycle de classe Gevrey 2 de paramètre r à valeurs dans G est presque-réductible dans $\cup_{r'>0} C_{r'}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$.

Nous allons prouver le théorème suivant, pour G parmi les groupes mentionnés ci-dessus et \mathcal{G} l'algèbre de Lie associée à G :

Théorème 1.1 Soit $0 < r \leq 1$, $A \in \mathcal{G}$, $F \in C_r^{G,2}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$. Il existe $\epsilon_0 < 1$ ne dépendant que de n, d, κ, τ, A, r tel que si

$$\|F\|_r \leq \epsilon_0$$

alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_\epsilon > 0$, $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon \in C_{r_\epsilon}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$, $Z_\epsilon \in C_{r_\epsilon}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$ tels que pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega Z_\epsilon(\theta) = (A + F(\theta))Z_\epsilon(\theta) - Z_\epsilon(\theta)(\bar{A}_\epsilon(\theta) + \bar{F}_\epsilon(\theta))$$

où

- \bar{A}_ϵ est réductible dans $C_{r_\epsilon}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$,
- $\|\bar{F}_\epsilon\|_{r_\epsilon} \leq \epsilon$,
- et $\|Z_\epsilon - Id\|_{r_\epsilon} \leq 2\epsilon_0^{\frac{1}{2}}$.

De plus, en dimension 2 ou si $G = GL(n, \mathbb{C})$ ou $U(n)$, $Z_\epsilon, \bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon$ sont continus sur \mathbb{T}^d .

1.2 Généralisations et conséquences

Le théorème 1.1 dit qu'au voisinage d'un cocycle constant, tous les cocycles sont presque-réductibles au sens où ils sont arbitrairement proches d'un cocycle réductible, ce qui signifie que la réductibilité est un phénomène prédominant. Cependant, si la réductibilité implique la presque-réductibilité, l'inverse n'est pas vrai : il existe des cocycles non réductibles même proches d'un cocycle constant.

L'intérêt de la notion de presque-réductibilité est qu'un cocycle presque réductible a une dynamique connue sur un temps très long.

Le théorème 1.1 est en fait vrai si l'on suppose F dans une classe plus grande que $C_r^{G,2}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$, à savoir les fonctions de $C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ vérifiant certaines "bonnes propriétés de périodicité" par rapport à la matrice A .

En dimension 2 ou si \mathcal{G} est complexe, ce résultat peut se reformuler comme un théorème de densité des cocycles réductibles au voisinage des cocycles constants :

Théorème 1.2 Soit $\mathcal{G} = gl(n, \mathbb{C}), u(n), gl(2, \mathbb{R}), sl(2, \mathbb{R})$ ou $o(2)$. Soit $0 < r \leq 1$ et $A \in \mathcal{G}$, $F \in C_r^{G,2}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$. Il existe ϵ_0 ne dépendant que de r, n, d, κ, τ, A tel que si

$$\|F\|_r \leq \epsilon_0$$

alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r_\epsilon > 0$, $H \in C_{r_\epsilon}^\omega(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ réductible dans $C_{r_\epsilon}^{G,2}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ et tel que

$$\|A + F - H\|_{r_\epsilon} \leq \epsilon$$

1.3 Résultats déjà connus

Un résultat comparable pour les cocycles lisses à valeurs dans les groupes compacts avait été obtenu par R. Krikorian dans [9] (th.5.1.1). Dans le cas d'un cocycle au-dessus d'une rotation du cercle, le contrôle de l'analyticité est bien meilleur (voir par exemple [1]) car il est alors possible d'utiliser des méthodes globales. Nous considérons ici le cas d'un tore de dimension quelconque. La méthode KAM que nous allons utiliser ici avait déjà produit des résultats de réductibilité en mesure totale pour des cocycles à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$ ([6], [7]).

Un résultat analogue au théorème 1.1 dans le cadre des cocycles analytiques à valeurs dans $GL(n, \mathbb{R})$ avait déjà été démontré dans [4] par L.H.Eliasson ; on se reportera également à sa généralisation dans [3]. Notons bien, cependant, la distinction suivante : le théorème 1.1 est un résultat de presque réductibilité faible, c'est-à-dire que le paramètre peut tendre vers 0 ; il en est de même pour le théorème d'Eliasson dans le cas des fonctions analytiques ([4]) où le rayon d'analyticité peut tendre vers 0. Dans le cas des fonctions analytiques, on peut obtenir un résultat de presque réductibilité forte ([3]), c'est-à-dire où le rayon d'analyticité reste strictement positif à la limite. Mais la question de la presque réductibilité forte dans le cas des fonctions Gevrey reste ouverte.

Notons que, comme dans [4] et [3], la perte de périodicité dans le théorème 1.1 est inévitable dans un groupe réel de dimension plus grande que 2. La notion de "bonnes propriétés de périodicité" a pour but de s'assurer qu'un seul doublement de période suffit. Le cadre symplectique introduit de nouvelles contraintes pour éliminer les résonances, par rapport au cadre réel, mais ces contraintes n'ont pas de conséquences sur la construction de la fonction de renormalisation, ce qui explique que l'on n'ait pas plus de perte de périodicité que dans le cadre $GL(n, \mathbb{R})$. Ainsi, comme dans [2], un seul doublement de période suffit dans le cas d'un groupe symplectique réel.

1.4 Plan de l'article

La preuve des théorèmes 1.1 et 1.2 reprend à peu près le même schéma de démonstration que dans [4] ; il s'agit d'une preuve par itération de type KAM. En voici les principales étapes :

- Construction d'une renormalisation Φ d'ordre N (proposition 4.2) pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bien choisi.

Notons qu'en dimension 2, Φ est telle que pour toute fonction H continue sur \mathbb{T}^d , $\Phi H \Phi^{-1}$ est continue sur \mathbb{T}^d .

- Résolution de l'équation homologique (proposition 5.2) : si \tilde{A} a un spectre vérifiant certaines conditions diophantiennes et que \tilde{F} est une fonction qui a certaines bonnes propriétés de périodicité relatives à \tilde{A} , alors il existe une solution \tilde{X} de l'équation

$$\partial_\omega \tilde{X} = [\tilde{A}, \tilde{X}] + \tilde{F}^N; \quad \hat{\tilde{X}}(0) = 0$$

qui a les mêmes propriétés de périodicité que \tilde{F} ; elle prend ses valeurs dans la même algèbre de Lie que \tilde{F} . De plus, elle vérifie une bonne estimation quitte à perdre un peu de régularité.

- Lemme inductif (proposition 6.6) : Si $\tilde{F} \in C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ a certaines propriétés de périodicité (relatives à \tilde{A}), si

$$\partial_\omega \Psi = \bar{A}\Psi - \Psi\tilde{A}$$

et $\bar{F} = \Psi\tilde{F}\Psi^{-1}$, alors il existe $Z \in C_{r'}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$ telle que

$$\partial_\omega Z = (\bar{A} + \bar{F})Z - Z(\bar{A}' + \bar{F}') \quad (9)$$

où \bar{A}' est réductible, \bar{F}' est beaucoup plus petit que \bar{F} , Z est proche de l'identité et $\Psi'^{-1}\bar{F}'\Psi'$ a des propriétés de périodicité relatives à A' analogues à celles de \tilde{F} .

L'estimation de \bar{F}' dépend de $\tilde{F} - \tilde{F}^N$, de la fonction de renormalisation Φ , et de la solution \tilde{X} de l'équation homologique.

- Itération du lemme inductif (théorème 7.2) : On itérera le lemme 6.6 grâce à un lemme numérique (lemme 7.1), pour réduire arbitrairement la perturbation.

Remarque: La fonction de renormalisation se construit selon le même principe que dans [4].

1.5 Notations

On notera $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire euclidien complexe, avec la convention qu'il est antilinéaire en la deuxième variable. Pour tout opérateur linéaire M , on notera M^* son adjoint, égal à la transposée de M dans le cas où M est réel. On notera aussi $M_{\mathcal{N}}$ la partie nilpotente de M , c'est-à-dire : si $M = PAP^{-1}$ avec A en forme normale de Jordan, et si A_D représente la partie diagonale de A , alors $M_{\mathcal{N}} = P(A - A_D)P^{-1}$. Pour simplifier l'écriture, si $A : 2\mathbb{T}^d \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, on notera A^{-1} la fonction $\theta \mapsto A(\theta)^{-1}$. Pour tout $m = (m_1, \dots, m_d) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$, on notera $|m| = |m_1| + \dots + |m_d|$. On désignera par J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$.

2 Bonnes propriétés de périodicité

Commençons par introduire quelques définitions. La notion de trivialité par rapport à une décomposition permettra d'expliciter plus facilement les fonctions de renormalisation ; les bonnes propriétés de périodicité ont déjà été introduites dans [4] et permettent de s'assurer, dans le cas réel, qu'un seul doublement de période est nécessaire à l'itération du lemme inductif.

2.1 Décompositions invariantes

Définition: $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_R\}$ est une *décomposition* de \mathbb{C}^n si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_j L_j$.

Définition: Soient $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ des décompositions de \mathbb{C}^n . On dit que \mathcal{L} est *plus fine* que \mathcal{L}' si pour tout $L \in \mathcal{L}$, il existe $L' \in \mathcal{L}'$ tel que $L \subset L'$; on dit que \mathcal{L} est *strictement plus fine* que \mathcal{L}' si \mathcal{L} est plus fine que \mathcal{L}' et $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}'$.

Définition: Soit $A \in gl(n, \mathbb{C})$; on dit que $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_s\}$ est une *A-décomposition*, ou *décomposition A-invariante*, si c'est une décomposition de \mathbb{C}^n et que pour tout i , $AL_i \subset L_i$. Les L_i sont les *sous-espaces* de \mathcal{L} .

Remarque: Une A-décomposition est toujours moins fine que la décomposition en sous-espaces propres généralisés. Ainsi, si deux matrices A et A' ont la même décomposition en sous-espaces propres généralisés, alors une A-décomposition est une A'-décomposition.

Notation : Soit \mathcal{L} une A-décomposition. Pour tout $L \in \mathcal{L}$, on note $\sigma(A|_L)$ le spectre de A restreint au sous-espace L .

Définition: Soit $\kappa' \geq 0$. On notera $\mathcal{L}_{A, \kappa'}$ l'unique A-décomposition \mathcal{L} telle que pour tous $L \neq L' \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \sigma(A|_L)$ et $\beta \in \sigma(A|_{L'}) \Rightarrow |\alpha - \beta| > \kappa'$ et qu'aucune A-décomposition strictement plus fine que \mathcal{L} n'a cette propriété.

Définition: Soit $A \in gl(n, \mathbb{C})$. On note \mathcal{L}_A la décomposition de \mathbb{C}^n qui est l'ensemble des sous-espaces propres généralisés de A .

Remarque: On fera attention au fait que \mathcal{L}_A n'est pas forcément identique à $\mathcal{L}_{A,0}$. En général \mathcal{L}_A est plus fine.

Définition: Soit \mathcal{L} une décomposition de \mathbb{C}^n . Pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique décomposition $u = \sum_{L \in \mathcal{L}} u_L$ avec $u_L \in L$ pour tout $L \in \mathcal{L}$. Pour tout $L \in \mathcal{L}$, on appelle *projection sur L relative à \mathcal{L}* , et on note $P_L^{\mathcal{L}}$, l'application définie par $P_L^{\mathcal{L}} u = u_L$.

Remarque: Soit $A \in gl(n, \mathbb{C})$ et $\kappa' > 0$. Si \mathcal{L} est une A-décomposition moins fine que $\mathcal{L}_{A, \kappa'}$, alors on a le lemme suivant, tiré de [4], appendice, lemme A¹ :

Lemme 2.1 *Il existe une constante $C_0 \geq 1$ ne dépendant que de n telle que tout sous-espace $L \in \mathcal{L}$ vérifie*

$$\|P_L^{\mathcal{L}}\| \leq C_0 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa'} \right)^{n(n+1)} \quad (10)$$

¹Le lemme A de [4] donne en fait une estimation en fonction de $\|A\|$, mais il apparaît clairement dans sa démonstration que l'estimation ne dépend en fait que de $A_{\mathcal{N}}$.

Par la suite, on notera toujours C_0 cette constante fixée dans le lemme 2.1.

Définition: Une (A, κ', γ) -décomposition est une A -décomposition \mathcal{L} telle que pour tout $L \in \mathcal{L}$, la projection sur L relative à \mathcal{L} vérifie l'estimation

$$\|P_L^\mathcal{L}\| \leq C_0 \left(\frac{1 + \|A_N\|}{\kappa'} \right)^\gamma \quad (11)$$

Remarque: Pour $A \in gl(n, \mathbb{C})$, on a toujours $A = \sum_{L, L' \in \mathcal{L}} P_L^\mathcal{L} A P_{L'}^\mathcal{L}$. En particulier, si \mathcal{L} est une A -décomposition, alors $A = \sum_{L \in \mathcal{L}} P_L^\mathcal{L} A P_L^\mathcal{L}$.

Définitions: Soit \mathcal{L} une décomposition.

- On dit que \mathcal{L} est une *décomposition réelle* si pour tout $L \in \mathcal{L}$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$;
- On dit que \mathcal{L} est une *décomposition symplectique* si c'est une décomposition de \mathbb{C}^n avec n pair et que pour tout $L \in \mathcal{L}$, il existe un unique $L' \in \mathcal{L}$ tel que $\langle L, JL' \rangle \neq 0$.
- On dit que \mathcal{L} est une *décomposition unitaire* si pour tout $L \neq L' \in \mathcal{L}$, $\langle L, L' \rangle = 0$.

Remarque:

- Si A est une matrice réelle, alors pour tout $\kappa' \geq 0$, $\mathcal{L}_{A, \kappa'}$ est une décomposition réelle.
- Pour tout L , il existe au moins un L' tel que $\langle L, JL' \rangle \neq 0$. Cela vient de la non-dégénérescence de la forme symplectique $\langle \cdot, J \cdot \rangle$.
- Si $A \in sp(n, \mathbb{R})$, alors toute A -décomposition \mathcal{L} moins fine que $\mathcal{L}_{A, 0}$ est une décomposition symplectique réelle. En effet, soient $L, L' \in \mathcal{L}$ tels que $\langle L, JL' \rangle \neq 0$; soient $v \in L, v' \in L'$ des vecteurs propres de A tels que $\langle v, Jv' \rangle \neq 0$ et λ, λ' leurs valeurs propres associées. Alors

$$\lambda \langle v, Jv' \rangle = \langle Av, Jv' \rangle = \langle v, A^* Jv' \rangle = -\langle v, JAv' \rangle = -\bar{\lambda}' \langle v, Jv' \rangle \quad (12)$$

et comme $\langle v, Jv' \rangle \neq 0$, alors $\lambda = -\bar{\lambda}'$.

- Si $A \in U(n)$, alors toute décomposition moins fine que $\mathcal{L}_{A, 0}$ est une décomposition unitaire.

2.2 Trivialité et bonnes propriétés de périodicité par rapport à une décomposition

Définition: Soit \mathcal{L} une décomposition de \mathbb{C}^n . On dit qu'une fonction Ψ est *triviale par rapport à \mathcal{L}* s'il existe $\{m_L, L \in \mathcal{L}\} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$, tels que pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\Psi(\theta) = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi \langle m_L, \theta \rangle} P_L^\mathcal{L} \quad (13)$$

Définition: On dit que la fonction Ψ est *triviale* s'il existe une décomposition \mathcal{L} telle que Ψ est triviale par rapport à \mathcal{L} .

Remarque:

- Si Ψ est triviale par rapport à \mathcal{L} et que \mathcal{L}' est plus fine que \mathcal{L} , alors elle est triviale par rapport à \mathcal{L}' .
- Si $\Phi, \Psi : 2\mathbb{T}^d \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ sont triviales par rapport à \mathcal{L} , alors le produit $\Phi\Psi$ est trivial par rapport à \mathcal{L} .
- Si Φ est triviale par rapport à une A -décomposition \mathcal{L} , alors pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$, $[A, \Phi(\theta)] = 0$.

Lemme 2.2 *Soit \mathcal{L} une décomposition réelle de \mathbb{C}^n , $\{m_L, L \in \mathcal{L}\} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ et Ψ définie par*

$$\Psi(\theta) = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi \langle m_L, \theta \rangle} P_L^{\mathcal{L}} \quad (14)$$

Alors Ψ est réelle si et seulement si pour tout L , $m_L = -m_{\bar{L}}$. De plus, si Ψ est réelle, alors Ψ est à valeurs dans $SL(n, \mathbb{R})$.

Pour la démonstration, se reporter à [3], lemme 1.2.

Remarque: Toute fonction triviale par rapport à une décomposition unitaire est unitaire. En effet, soit \mathcal{L} une décomposition unitaire, Φ triviale par rapport à \mathcal{L} et $L, L' \in \mathcal{L}$. Alors pour tout $u \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{L}'$,

$$\langle \Phi(\theta)u, \Phi(\theta)v \rangle = \langle e^{2i\pi \langle m_L, \theta \rangle} u, e^{2i\pi \langle m_{L'}, \theta \rangle} v \rangle = \langle u, v \rangle \quad (15)$$

Lemme 2.3 *Soit \mathcal{L} une décomposition symplectique réelle et $\{m_L, L \in \mathcal{L}\}$ une famille d'éléments de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$. Soit $\Psi = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi \langle m_L, \cdot \rangle} P_L^{\mathcal{L}}$. Alors Ψ est à valeurs dans $Sp(n, \mathbb{R})$ si et seulement si*

- pour tout L , $m_L = -m_{\bar{L}}$
- et si $\langle L, JL' \rangle \neq 0$, alors $m_L = m_{L'}$.

Démonstration: Se référer à [3], lemme 1.3.

Définissons les propriétés de périodicité.

Définition: Soit \mathcal{L} une décomposition de \mathbb{C}^n . On dit que $F \in C^0(2\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{R}))$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} s'il existe Φ triviale par rapport à \mathcal{L} telle que $\Phi^{-1}F\Phi$ soit continue sur \mathbb{T}^d .

Pour préciser la famille (m_L) qui définit Φ , on dira que F a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} et (m_L) .

Remarque:

- Si $F \in C^0(2\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{R}))$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une décomposition \mathcal{L} et que Φ est triviale par rapport à \mathcal{L} , alors $\Phi F \Phi^{-1}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} .
- Si \mathcal{L}' est une décomposition de \mathbb{C}^n qui est plus fine que \mathcal{L} et que F a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} , alors F a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L}' .
- Soit \mathcal{L} une décomposition de \mathbb{C}^n et $(m_L)_{L \in \mathcal{L}}$ une famille d'éléments de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$. Si $F_1, F_2 \in C^0(2\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{R}))$ ont de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} et (m_L) , alors le produit $F_1 F_2$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} et (m_L) .

3 Généralités sur les fonctions de classe Gevrey deux

Remarque:

- Pour tous $0 < r' < r$, on a l'inclusion $C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G}) \subset C_{r'}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ et $\|f\|_{r'} \leq \|f\|_r$.
- Pour $f, g \in C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$, on a $\|fg\|_r \leq \|f\|_r \|g\|_r$ (voir par exemple [11], appendice).

Lemme 3.1 *Pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$ et tout $r' > 0$, la fonction $\theta \mapsto e^{2i\pi\langle m, \theta \rangle}$ vérifie*

$$\|e^{2i\pi\langle m, \cdot \rangle}\|_{r'} \leq e^{2\pi|m|r'^2} \quad (16)$$

Démonstration: Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et tout $\theta \in \mathbb{T}^d$,

$$\begin{aligned} \frac{r'^{2|\alpha|}}{(\alpha!)^2} |\partial^\alpha(e^{2i\pi\langle m, \theta \rangle})| &\leq \frac{r'^{2|\alpha|}}{(\alpha!)^2} \prod_j |2\pi m_j|^{\alpha_j} \\ &\leq \prod_j \frac{(r'^2 |2\pi m_j|)^{\alpha_j}}{(\alpha_j!)^2} \leq \prod_j e^{2\pi m_j r'^2} = e^{2\pi|m|r'^2} \quad \square \end{aligned} \quad (17)$$

Remarque: Ceci implique que les fonctions analytiques sur un r -voisinage du tore ou du double tore sont Gevrey deux de paramètre r ;

4 Fonction de renormalisation

Rappelons un lemme de [3] permettant de construire une fonction de renormalisation à l'ordre N :

Proposition 4.1 *Soit $A \in \mathcal{G}$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit*

$$\kappa'' = \frac{\kappa}{n(8N)^\tau} \quad (18)$$

Il existe une fonction Φ triviale par rapport à $\mathcal{L}_{A, \kappa''}$ et à valeurs dans G telle que

1. *pour tout $r' \geq 0$,*

$$|\Phi|_{r'} \leq nC_0 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa''} \right)^{n(n+1)} e^{4\pi N r'}, \quad |\Phi^{-1}|_{r'} \leq nC_0 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa''} \right)^{n(n+1)} e^{4\pi N r'} \quad (19)$$

2. *Si \tilde{A} est définie par*

$$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d, \quad \partial_\omega \Phi(\theta) = A\Phi(\theta) - \Phi(\theta)\tilde{A} \quad (20)$$

alors

$$\|\tilde{A} - A\| \leq 4\pi N \quad (21)$$

et \tilde{A} a un spectre $DC_\omega^N(\kappa'', \tau)$.

3. Si $\mathcal{G} = gl(n, \mathbb{C})$ ou $u(n)$, Φ est définie sur \mathbb{T}^d .

Définition: On appellera la fonction Φ construite dans la proposition 4.1 une *renormalisation de A d'ordre N* .

Cette fonction vérifie une bonne estimation en norme Gevrey, comme le montre la proposition suivante :

Lemme 4.2 Soit $N \geq 2$, $A \in gl(n, \mathbb{C})$ et Φ une renormalisation de A d'ordre N . Alors Φ vérifie, pour tout r' , l'estimation en norme Gevrey

$$\|\Phi\|_{r'} \leq nC.C_0 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa''} \right)^{n(n+1)} e^{4\pi r'^2 N} \quad (22)$$

où C ne dépend que de d , et de même pour Φ^{-1} . De plus, si $\mathcal{G} = o(n)$ ou $u(n)$, alors

$$\|\Phi\|_{r'} \leq nC e^{4\pi r'^2 N} \quad (23)$$

et de même pour Φ^{-1} .

Démonstration: Pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$ et tout $r' > 0$, d'après le lemme 3.1,

$$\|e^{2i\pi \langle m, \cdot \rangle}\|_{r'} \leq C e^{2\pi r'^2 |m|} \quad (24)$$

où C ne dépend que de d . Donc

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{r'} &\leq \sum_{L \in \mathcal{L}_{A, \kappa''}} \|P_L^{\mathcal{L}_{A, \kappa''}}\| \|e^{2i\pi \langle m_L, \cdot \rangle}\|_{r'} \\ &\leq C \sum_{L \in \mathcal{L}_{A, \kappa''}} \|P_L^{\mathcal{L}_{A, \kappa''}}\| e^{2\pi r'^2 |m_L|} \\ &\leq C \sum_{L \in \mathcal{L}_{A, \kappa''}} \|P_L^{\mathcal{L}_{A, \kappa''}}\| e^{4\pi r'^2 N} \end{aligned} \quad (25)$$

or d'après le lemme 2.1,

$$\|P_L^{\mathcal{L}_{A, \kappa''}}\| \leq C_0 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa''} \right)^{n(n+1)} \quad (26)$$

d'où (22). Si \mathcal{G} est $o(n)$ ou $u(n)$, alors $\mathcal{L}_{A, \kappa''}$ est une décomposition unitaire et donc $P_L^{\mathcal{L}_{A, \kappa''}}$ est de norme 1, d'où (23). \square

5 Equation homologique

Lemme 5.1 Soit $0 < r' < r \leq 1$, $f \in C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ et $g \in C_{r'}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$. Soient $C > 0, D \geq 0$. Supposons que pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$,

$$\|\hat{g}(m)\| \leq C|m|^D \|\hat{f}(m)\| \quad (27)$$

Alors

$$\|g\|_{r'} \leq C' C \|f\|_r \left(\frac{1}{r-r'} \right)^{3(D+2)} \quad (28)$$

où C' ne dépend que de d, D .

Démonstration: On a pour tout $\theta \in N\mathbb{T}^d$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha g(\theta)\| &\leq \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d} \|\hat{g}(m)\| |\partial^\alpha e^{2i\pi\langle m, \theta \rangle}| \\ &\leq \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d} \|\hat{g}(m)\| \prod_j |2\pi m_j|^{\alpha_j} \end{aligned} \quad (29)$$

donc par hypothèse,

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha g(\theta)\| &\leq C \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d} |m|^D \|\hat{f}(m)\| \prod_j |2\pi m_j|^{\alpha_j} \\ &\leq C' C \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|2\pi m|^{2d}} \prod_i |2\pi m_i|^{\alpha_i + (D+2)e_i} \|\hat{f}(m)\| \end{aligned} \quad (30)$$

et donc en notant $\bar{1} = (1, \dots, 1)$,

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha g(\theta)\| &\leq C' C \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|2\pi m|^{2d}} \|\partial^{\alpha + \widehat{(D+2)\bar{1}}} f(m)\| \\ &\leq C' C \sup_\theta \|\partial^{\alpha + (D+2)\bar{1}} f(\theta)\| \end{aligned} \quad (31)$$

où C' ne dépend que de d, D , donc

$$\begin{aligned}
\|g\|_{r'} &= \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d} (r')^{2|\alpha|} \frac{1}{(\alpha!)^2} \sup_{\theta} \|\partial^\alpha g(\theta)\| \\
&\leq C' C \sup_{\alpha} (r')^{2|\alpha|} \frac{1}{(\alpha!)^2} \sup_{\theta} \|\partial^{\alpha+(D+2)\bar{1}} f(\theta)\| \\
&\leq C' C \sup_{\alpha} \frac{r^{2|\alpha+(D+2)\bar{1}|}}{((\alpha+(D+2)\bar{1})!)^2} \sup_{\theta} \|\partial^{\alpha+(D+2)\bar{1}} f(\theta)\| \frac{r'^{2|\alpha|}}{r^{2|\alpha+(D+2)\bar{1}|}} \left(\frac{(\alpha+(D+2)\bar{1})!}{\alpha!} \right)^2 \\
&\leq C' C \|f\|_r \sup_{\alpha} \frac{r'^{2|\alpha|}}{r^{2(|\alpha|+(D+2)d)}} \prod_i \left(\frac{(\alpha_i + D + 2)!}{\alpha_i!} \right)^2 \\
&\leq C' C \|f\|_r \sup_{\alpha} \frac{r'^{2|\alpha|}}{r^{2(|\alpha|+(D+2)d)}} \left(\frac{(|\alpha| + D + 2)!}{|\alpha|!} \right)^{2d} \\
&\leq C' C \|f\|_r \sup_{\alpha} \frac{r'^{2|\alpha|}}{r^{2(|\alpha|+(D+2)d)}} (|\alpha| + D + 2)^{2(D+2)d}
\end{aligned} \tag{32}$$

Or la fonction

$$\phi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, \quad t \mapsto \left(\frac{r'}{r} \right)^t t^{2(D+2)d}$$

atteint son maximum en $t = \frac{2(D+2)d}{\ln \frac{r}{r'}}$ où elle vaut $e^{-2(D+2)d} \left(\frac{2(D+2)d}{\ln \frac{r}{r'}} \right)^{2(D+2)d}$. D'où

$$\begin{aligned}
\|g\|_{r'} &\leq C' C \|f\|_r e^{-2(D+2)d} \left(\frac{2(D+2)d}{r' \ln \frac{r}{r'}} \right)^{2(D+2)d} \\
&\leq C' C \|f\|_r e^{-2(D+2)d} \frac{(2(D+2)d)^{2(D+2)d}}{(r - r')^{3(D+2)d}} \square
\end{aligned} \tag{33}$$

Proposition 5.2 *Soient*

- $N \in \mathbb{N}$,
- $\kappa' \in]0, \kappa]$,
- $\gamma \geq n(n+1)$,
- $0 < r' < r$.

Soit $\tilde{A} \in \mathcal{G}$ avec un spectre $DC_\omega^N(\kappa', \tau)$. Soit $\tilde{F} \in C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ avec de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$ -décomposition \mathcal{L} . Alors il existe une solution $\tilde{X} \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ de l'équation

$$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d, \quad \partial_\omega \tilde{X}(\theta) = [\tilde{A}, \tilde{X}(\theta)] + \tilde{F}^N(\theta) - \hat{\tilde{F}}(0); \quad \hat{\tilde{X}}(0) = 0 \tag{34}$$

telle que

- si \tilde{F} a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} et (m_L) , alors \tilde{X} a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} et (m_L) ; en particulier, si \tilde{F} est définie sur \mathbb{T}^d , alors \tilde{X} l'est également,

– Il existe C', D' ne dépendant que de n, d, τ tels que,

$$\| \tilde{X} \|_{r'} \leq C' \left(\frac{1 + \|\tilde{A}_N\|}{(r - r')\kappa'} \right)^{D'\gamma} \| \tilde{F} \|_r \quad (35)$$

De plus, la troncation de \tilde{X} à l'ordre N est unique.

Démonstration: • L'existence de \tilde{X} , son unicité jusqu'à l'ordre N , le fait qu'elle prend ses valeurs dans \mathcal{G} et ses bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} se démontrent comme dans [3], proposition 3.2.

• Pour obtenir l'estimation (35), on démontre d'abord que pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ et tous $L, L' \in \mathcal{L}'$,

$$\|P_L^\mathcal{L} \hat{X}(m) P_{L'}^\mathcal{L}\| \leq C' \frac{(1 + \|\tilde{A}_N\|)^{n^2-1} |m|^{(n^2-1)\tau}}{\kappa'^{(n^2-1)}} \|P_L^\mathcal{L} \hat{F}(m) P_{L'}^\mathcal{L}\| (\|P_L^\mathcal{L}\| \|P_{L'}^\mathcal{L}\|)^{n^2-1} \quad (36)$$

Pour cela, nous allons faire un raisonnement analogue à celui de [4], lemme 2. Soit $\mathcal{A}_{L,L'}$ l'opérateur linéaire allant de $gl(n, \mathbb{C})$ dans lui-même tel que pour tout $M \in gl(n, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{A}_{L,L'} M = \tilde{A} P_L^\mathcal{L} M - M P_{L'}^\mathcal{L} \tilde{A} \quad (37)$$

En décomposant (34) en blocs, on obtient pour tous $L, L' \in \mathcal{L}$

$$\partial_\omega(P_L^\mathcal{L} \tilde{X} P_{L'}^\mathcal{L}) = \mathcal{A}_{L,L'} P_L^\mathcal{L} \tilde{X} P_{L'}^\mathcal{L} + P_L^\mathcal{L} (\tilde{F}^N - \tilde{F}(0)) P_{L'}^\mathcal{L} \quad (38)$$

Donc pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ tel que $0 < |m| \leq N$,

$$2i\pi \langle m, \omega \rangle (P_L^\mathcal{L} \hat{X}(m) P_{L'}^\mathcal{L}) = \mathcal{A}_{L,L'} (P_L^\mathcal{L} \hat{X}(m) P_{L'}^\mathcal{L}) + P_L^\mathcal{L} \hat{F}(m) P_{L'}^\mathcal{L} \quad (39)$$

donc

$$(P_L^\mathcal{L} \hat{X}(m) P_{L'}^\mathcal{L}) = (2i\pi \langle m, \omega \rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1} P_L^\mathcal{L} \hat{F}(m) P_{L'}^\mathcal{L} \quad (40)$$

Représentons $\mathcal{A}_{L,L'}$ comme une matrice de dimension n^2 . Soient $A_D \in gl(n^2, \mathbb{C})$ diagonale et $A_N \in gl(n^2, \mathbb{C})$ nilpotente telles que

$$(2i\pi \langle m, \omega \rangle - \mathcal{A}_{L,L'}) = A_D - A_N \quad (41)$$

Alors A_N est l'opérateur

$$A_N : B \mapsto (\tilde{A}P_L^{\mathcal{L}})_N B - B(P_{L'}^{\mathcal{L}}\tilde{A})_N$$

De plus,

$$(2i\pi\langle m, \omega \rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1} = A_D^{-1}(I + A_N A_D^{-1} + \dots + (A_N A_D^{-1})^{n^2-1}) \quad (42)$$

Nous allons estimer $(2i\pi\langle m, \omega \rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1}$, pour $m \in \mathbb{Z}^d$ si $L = \bar{L}'$ et $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ si $L \neq \bar{L}'$. Chaque coefficient de $A_D^{-1}(A_N A_D^{-1})^{j-1}$ est de la forme $\frac{p}{q}$ avec $|p| \leq \|A_N\|^{j-1}$ et $q = \beta_1 \dots \beta_j$ où les β_i sont des valeurs propres de $2i\pi\langle m, \omega \rangle - \mathcal{A}_{L,L'}$. Or

$$\sigma(\mathcal{A}_{L,L'}) = \{\alpha - \alpha' \mid \alpha \in \sigma(\tilde{A}_{|L}), \alpha' \in \sigma(\tilde{A}_{|L'})\} \quad (43)$$

et de plus, pour tous $\alpha \in \sigma(\tilde{A}_{|L}), \alpha' \in \sigma(\tilde{A}_{|L'})$,

$$|\alpha - \alpha' - 2i\pi\langle m, \omega \rangle| \geq \frac{\kappa'}{|m|^\tau} \quad (44)$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$ si $L = \bar{L}'$ et tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ si $L \neq \bar{L}'$. Ainsi,

$$\|(2i\pi\langle m, \omega \rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1}\| \leq c_n(1 + \|\tilde{A}_N\|(\|P_L^{\mathcal{L}}\| + \|P_{L'}^{\mathcal{L}}\|))^{n^2-1} \left(\frac{|m|^\tau}{\kappa'}\right)^{n^2-1} \quad (45)$$

où c_n ne dépend que de n , et (40) implique (36).

L'estimation (36) et le lemme 5.1 impliquent alors que

$$\|P_L^{\mathcal{L}'} \tilde{X} P_{L'}^{\mathcal{L}'}\|_{r'} \leq C'' \left(\frac{1 + \|\tilde{A}_N\|}{(r - r')\kappa'}\right)^{D\gamma} \|P_L^{\mathcal{L}'} \tilde{F} P_{L'}^{\mathcal{L}'}\|_r \quad (46)$$

où C'', D ne dépendent que de n, d, τ . Ainsi,

$$\|\tilde{X}\|_{r'} \leq \sum_{L,L'} \|P_L^{\mathcal{L}'} \tilde{X} P_{L'}^{\mathcal{L}'}\|_r \leq C'' \left(\frac{1 + \|\tilde{A}_N\|}{(r - r')\kappa'}\right)^{D\gamma} \sum_{L,L'} \|P_L^{\mathcal{L}'} \tilde{F} P_{L'}^{\mathcal{L}'}\|_r \quad (47)$$

d'où

$$\|\tilde{X}\|_{r'} \leq C_3 \left(\frac{1 + \|\tilde{A}\|}{(r - r')\kappa'}\right)^{D'\gamma} \|\tilde{F}\|_r \quad (48)$$

où D', C_3 ne dépendent que de n, d, τ . \square

6 Lemme inductif

6.1 Lemmes auxiliaires

Rappelons un lemme démontré dans [3] qui sera utilisé pour itérer le lemme inductif sans faire intervenir une fonction de renormalisation à chaque étape, ce qui améliorera de beaucoup les estimations.

Lemme 6.1 *Soient*

- $\kappa' \in]0, 1[, C > 0,$
- $\tilde{F} \in \mathcal{G},$
- $\tilde{\epsilon} = ||\tilde{F}||,$
- $\tilde{N} \in \mathbb{N},$
- $\tilde{A} \in \mathcal{G}$ avec un spectre $DC_{\omega}^{\tilde{N}}(\kappa', \tau).$

Il existe une constante c ne dépendant que de $n\tau$ telle que si $\tilde{\epsilon}$ est assez petit pour que

$$\tilde{\epsilon} \leq c \left(\frac{C^{\tau} \kappa'}{1 + ||\tilde{A}||} \right)^{2n} \quad (49)$$

et

$$\tilde{N} \leq \frac{|\log \tilde{\epsilon}|^4}{C} \quad (50)$$

alors $\tilde{A} + \tilde{F}$ a un spectre $DC_{\omega}^{\tilde{N}}(\frac{3\kappa'}{4}, \tau).$

Remarque: Comme dans [3], si G est un groupe compact, alors le lemme 6.1 est vrai en remplaçant (49) par une condition de petitesse qui ne dépend pas de \tilde{A} .

Le lemme qui suit sera utilisé pour garantir qu'un seul doublement de période est nécessaire.

Lemme 6.2 *Soit $A, A' \in gl(n, \mathbb{R})$ et $H : 2\mathbb{T}^d \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$. Supposons que H a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une A -décomposition \mathcal{L} et que*

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}, P_L^{\mathcal{L}}(A' - A)P_{L'}^{\mathcal{L}} \neq 0 \Rightarrow P_L^{\mathcal{L}} H P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \quad (51)$$

Alors H a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une A' -décomposition moins fine que \mathcal{L} .

La démonstration se trouve dans [3] (lemme 4.2).

Sous-lemme 6.3 *Soit $f \in C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{C}))$. Alors pour tout*

$$N \geq \frac{e^2 d^2}{r^4} \quad (52)$$

on a l'estimation

$$\sum_{|m|>N} \|\hat{f}(m)\| \leq C_d \|f\|_r N^D e^{-\sqrt[4]{N}} \quad (53)$$

où C_d ne dépend que de d .

Démonstration: Par définition de $\|f\|_r$, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$:

$$\|\widehat{\partial^\alpha f}(m)\| \leq \sup_{\theta} \|\partial^\alpha f(\theta)\| \leq \frac{\alpha!^2}{r^{2|\alpha|}} \|f\|_r \quad (54)$$

Or

$$\partial^\alpha f(\theta) \sim \sum_m \hat{f}(m) \partial^\alpha (e^{2i\pi\langle m, \theta \rangle}) \sim \sum_m \hat{f}(m) \prod_j (2i\pi m_j)^{\alpha_j} (e^{2i\pi\langle m, \theta \rangle}) \quad (55)$$

donc

$$\widehat{\partial^\alpha f}(m) = \prod_j (2i\pi m_j)^{\alpha_j} \hat{f}(m) \quad (56)$$

et donc

$$\|\hat{f}(m)\| \leq \frac{\alpha!^2}{\prod_j |2i\pi m_j|^{\alpha_j} r^{2|\alpha|}} \|f\|_r \quad (57)$$

Il existe forcément $1 \leq j \leq d$ tel que $|m_j| \geq \frac{|m|}{d}$. Notons $M = |m|$ et supposons que $M \geq 1$. Réécrivons (57) avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ où $\alpha_l = E(\sqrt[4]{M})$ si $l = j$ et $\alpha_l = 0$ sinon. Alors

$$\|\hat{f}(m)\| \leq \frac{(\sqrt[4]{M})!^2}{(\frac{2\pi r^2 M}{d})^{\sqrt[4]{M}}} \|f\|_r \leq c \frac{(\sqrt[4]{M} + 1)^{2(\sqrt[4]{M}+1)} e^{-2\sqrt[4]{M}}}{(\frac{2\pi r^2 M}{d})^{\sqrt[4]{M}}} \|f\|_r \leq c \frac{(2\sqrt{M})^{\sqrt[4]{M}+1} e^{-2\sqrt[4]{M}}}{(\frac{2\pi r^2 M}{d})^{\sqrt[4]{M}}} \|f\|_r \quad (58)$$

où c est une constante numérique.

Ceci implique que

$$\sum_{|m|>N} \|\hat{f}(m)\| \leq C_d \sum_{M>N} \frac{M^{d+\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt[4]{M}}}{(\frac{\sqrt{M}\pi r^2}{d})^{\sqrt[4]{M}}} \|f\|_r \quad (59)$$

où C_d ne dépend que de d , d'où

$$\sum_{|m|>N} \|\hat{f}(m)\| \leq C_d \|f\|_r \int_N^{+\infty} \frac{t^{d+\frac{1}{2}}}{(\frac{\sqrt{t}}{d}r^2)^{\sqrt[4]{t}}} e^{-2\sqrt[4]{t}} dt \quad (60)$$

et en effectuant le changement de variable $T = t^{\frac{1}{4}}$,

$$\sum_{|m|>N} \|\hat{f}(m)\| \leq C'_d \|f\|_r \int_{\sqrt[4]{N}}^{+\infty} \frac{T^{4d+2}}{(\frac{T^2}{d}r^2)^T} e^{-2T} T^3 dT \quad (61)$$

pour C'_d ne dépendant que de d ; finalement, pour certains C''_d, D ne dépendant que de d ,

$$\sum_{|m|>N} \|\hat{f}(m)\| \leq C''_d \|f\|_r \frac{N^D}{|\log(\frac{d}{N^{\frac{1}{2}}r^2})|^D} \left(\frac{d}{N^{\frac{1}{2}}r^2}\right)^{\sqrt[4]{N}} \quad (62)$$

et comme, par hypothèse, $\frac{d}{N^{\frac{1}{2}}r^2} \leq e^{-1}$, alors

$$\sum_{|m|>N} \|\hat{f}(m)\| \leq C''_d \|f\|_r N^D e^{-\sqrt[4]{N}} \quad (63)$$

Lemme 6.4 Soient $0 < r \leq 1$, $f \in C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{C}))$, $N \in \mathbb{N}$ et f^N la troncation de f à l'ordre N . Supposons que

$$N \geq \frac{16e^2 d^2}{r^4} \quad (64)$$

Alors

$$\|f - f^N\|_{\frac{r}{2}} \leq C_d \|f\|_r N^D e^{-\sqrt[4]{N}} \quad (65)$$

où C_d et D ne dépendent que de d .

Démonstration: Par définition,

$$\|f - f^N\|_{\frac{r}{2}} = \sup_{\alpha, \theta} \frac{(\frac{r}{2})^{2|\alpha|}}{\alpha!^2} |\partial^\alpha(f - f^N)(\theta)| \quad (66)$$

donc

$$\begin{aligned}
\|f - f^N\|_{\frac{r}{2}} &= \sup_{\alpha, \theta} \frac{(\frac{r}{2})^{2|\alpha|}}{\alpha!^2} \left| \sum_{m > N} \hat{f}(m) \partial^\alpha (e^{2i\pi \langle m, \theta \rangle}) \right| \\
&= \sup_{\alpha, \theta} \frac{(\frac{r}{2})^{2|\alpha|}}{\alpha!^2} \left| \sum_{m > N} \hat{f}(m) m^\alpha e^{2i\pi \langle m, \theta \rangle} \right| \\
&= \sup_{\alpha, \theta} \frac{(\frac{r}{2})^{2|\alpha|}}{\alpha!^2} \left| \sum_{m > N} \widehat{\partial^\alpha f}(m) e^{2i\pi \langle m, \theta \rangle} \right|
\end{aligned} \tag{67}$$

et par le sous-lemme 6.3, il existe C_d, D ne dépendant que de d tels que

$$\|f - f^N\|_{\frac{r}{2}} \leq C_d \sup_{\alpha} \frac{(\frac{r}{2})^{2|\alpha|}}{\alpha!^2} \|\partial^\alpha f\|_{\frac{r}{2}} N^D e^{-\sqrt[4]{N}} \tag{68}$$

Or, d'après [11], lemme A.2, pour tout α ,

$$\frac{(\frac{r}{2})^{2|\alpha|}}{\alpha!^2} \|\partial^\alpha f\|_{\frac{r}{2}} \leq \|f\|_r \tag{69}$$

d'où

$$\|f - f^N\|_{\frac{r}{2}} \leq C_d \|f\|_r N^D e^{-\sqrt[4]{N}} \square \tag{70}$$

6.2 Premier lemme inductif

Proposition 6.5 *Soient*

- $\tilde{\epsilon} > 0, \tilde{r} \leq 1, \kappa' > 0, \tilde{N} \in \mathbb{N}, \gamma \geq n(n+1)$;
- $\tilde{F} \in C_{\tilde{r}}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G}), \tilde{A} \in \mathcal{G}$,
- \mathcal{L} une $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$ -décomposition.

Il existe une constante $C'' > 0$ ne dépendant que de τ, n telle que si

1. \tilde{A} a un spectre $DC_{\omega}^{\tilde{N}}(\kappa', \tau)$;
- 2.

$$\|\hat{\tilde{F}}(0)\| \leq \tilde{\epsilon} \leq C'' \left(\frac{\kappa'}{1 + \|\tilde{A}\|} \right)^{2n} \tag{71}$$

et

$$\left(\frac{4ed}{\tilde{r}^2} \right)^2 \leq \tilde{N} \leq (4ed)^2 |\log \tilde{\epsilon}|^4 \tag{72}$$

3. \tilde{F} a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L}

alors il existe

- $C' \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de n, d, κ, τ ,
- $D \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de n, d, τ ,
- $X \in C_{\frac{\tilde{r}}{2}}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$,
- $A' \in \mathcal{G}$
- une $(A', \frac{3\kappa'}{4}, \gamma)$ -décomposition \mathcal{L}'

vérifiant les propriétés suivantes :

1. A' a un spectre $DC_\omega^{\tilde{N}}(\frac{3\kappa'}{4}, \tau)$,
2. $\|A' - \tilde{A}\| \leq \tilde{\epsilon}$;
3. la fonction $F' \in C_{\frac{\tilde{r}}{2}}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ définie par

$$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d, \partial_\omega e^{X(\theta)} = (\tilde{A} + \tilde{F}(\theta))e^{X(\theta)} - e^{X(\theta)}(A' + F'(\theta)) \quad (73)$$

a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L}'

4. pour tout $s \leq \tilde{r}$,

$$\|X\|_s \leq C' \left(\frac{1 + \|\tilde{A}_\mathcal{N}\|}{\kappa'(\tilde{r} - s)} \right)^{D\gamma} \|\tilde{F}\|_{\tilde{r}} \quad (74)$$

5. et pour tout $s \leq \frac{\tilde{r}}{2}$,

$$\|F'\|_s \leq C' e^{\|X\|_s} \|\tilde{F}\|_{\tilde{r}} (\tilde{N}^d e^{-\sqrt[4]{\tilde{N}}} + \frac{(1 + \|\tilde{A}_\mathcal{N}\|)^{D\gamma}}{(\kappa'(\tilde{r} - s))^{D\gamma}} \|\tilde{F}\|_{\tilde{r}} (1 + e^{\|X\|_s})) \quad (75)$$

De plus, si \tilde{F} est continue sur \mathbb{T}^d , alors X et F' le sont également.

Démonstration: • Par hypothèse, \tilde{F} a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} et une certaine famille (m_L) et \tilde{A} a un spectre $DC_\omega^{\tilde{N}}(\kappa', \tau)$, donc on peut appliquer la proposition 5.2. Soit $X \in C_{\frac{\tilde{r}}{2}}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ une solution de

$$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d, \partial_\omega X(\theta) = [\tilde{A}, X(\theta)] + \tilde{F}^{\tilde{N}}(\theta) - \hat{\tilde{F}}(0) \quad (76)$$

vérifiant la conclusion de la proposition 5.2.

Posons $A' := \tilde{A} + \hat{\tilde{F}}(0)$.

- On a bien $\|\tilde{A} - A'\| = \|\hat{\tilde{F}}(0)\|$, d'où la propriété 2.
- De plus, soit c la constante donnée par le lemme 6.1, et supposons que $C'' \leq c$. Les hypothèses (71) et (72) permettent d'appliquer le lemme 6.1 avec $C = \frac{1}{(4ed)^2}$ pour déduire que A' a un spectre $DC_\omega^{\tilde{N}}(\frac{3\kappa'}{4}, \tau)$ d'où la propriété 1.
- Soit $F' \in C_{\frac{\tilde{r}}{2}}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ la fonction définie par (73). Alors

$$F' = e^{-X}(\tilde{F} - \tilde{F}^{\tilde{N}}) + e^{-X}\tilde{F}(e^X - Id) + (e^{-X} - Id)\hat{\tilde{F}}(0) - e^{-X} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} X^l (\tilde{F}^{\tilde{N}} - \hat{\tilde{F}}(0)) X^{k-1-l} \quad (77)$$

Nous allons appliquer le lemme 6.2 avec $A = \tilde{A}$ et $G = F'$, pour obtenir la propriété 3. La fonction F' a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} et une certaine famille (m_L) car X et \tilde{F} les ont. De plus, comme \tilde{F} a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L} ,

$$P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{F}}(0) P_{L'}^{\mathcal{L}} \neq 0 \Rightarrow P_L^{\mathcal{L}} \tilde{F} P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \quad (78)$$

or

$$P_L^{\mathcal{L}} \tilde{F} P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \Rightarrow m_L - m_{L'} \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow P_L^{\mathcal{L}} F' P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \quad (79)$$

donc l'hypothèse (51) du lemme 6.2 est vérifiée. D'après le lemme 6.2, F' a donc de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une A' -décomposition \mathcal{L}' qui est moins fine que \mathcal{L} , donc \mathcal{L}' est une $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$ -décomposition. Comme c'est une $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$ -décomposition, chaque sous-espace $L \in \mathcal{L}'$ vérifie

$$\| P_L^{\mathcal{L}'} \| \leq C_0 \left(\frac{1 + \|\tilde{A}_{\mathcal{N}}\|}{\kappa'} \right)^\gamma \quad (80)$$

donc

$$\| P_L^{\mathcal{L}'} \| \leq C_0 \left(\frac{1 + \|A'_{\mathcal{N}}\| + 2\tilde{\epsilon}}{\kappa'} \right)^\gamma \leq C_0 \left(\frac{1 + \|A'_{\mathcal{N}}\|}{\frac{3\kappa'}{4}} \right)^\gamma \quad (81)$$

donc \mathcal{L}' est une $(A', \frac{3\kappa'}{4}, \gamma)$ -décomposition, d'où la propriété 3.

- La propriété 4 est donnée par la proposition 5.2.
- L'estimation de $\|F'\|_s$ vient de l'expression (77) et du lemme 6.4, que l'on peut appliquer avec $r = \tilde{r}$, $f = \tilde{F}$, $N = \tilde{N}$, grâce à l'hypothèse (72) et la propriété 4. \square

6.3 Deuxième lemme inductif

On peut obtenir directement l'étape inductive en itérant deux fois le lemme inductif sans renormalisation. Posons

$$N(\epsilon) = (4ed)^2 |\log \epsilon|^4 \quad (82)$$

et

$$\kappa''(\epsilon) = \frac{\kappa}{(9nN(\epsilon))^\tau} \quad (83)$$

Faisons une hypothèse supplémentaire sur γ . Soit $\bar{\gamma} \geq n(n+1)$ ne dépendant que de n tel que $C_0^{\frac{1}{2\bar{\gamma}}} \leq 2$.

Proposition 6.6 *Soient*

- $A \in \mathcal{G}$,
- $r \leq 1, \gamma \geq \bar{\gamma}$,
- $\bar{A}, \bar{F} \in C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$, $\Psi \in C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, G)$,
- $|\bar{F}|_r = \epsilon$,

Il existe $\tilde{C}' > 0$ ne dépendant que de n, d, κ, τ et $D_1 \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de n, d, τ tels que si en notant $r' = \frac{1}{|\log \epsilon|^2}$,

1.

$$\epsilon \leq \tilde{C}' \left(\frac{\kappa''(\epsilon)r'}{2(\|A\| + 1)} \right)^{D_1 \gamma} \quad (84)$$

et

$$\frac{4}{|\log \epsilon|^2} \leq r \quad (85)$$

2. \bar{A} est réductible à A par Ψ ,

3. $\Psi^{-1}\bar{F}\Psi$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A, \kappa''(\epsilon), \gamma)$ -décomposition \mathcal{L} ,

4. pour tout $s \leq r$, $|\Psi|_s \leq (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{96}}$ et $|\Psi^{-1}|_s \leq (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{96}}$,

alors il existe

- $Z' \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, G)$,
- $\bar{A}', \bar{F}' \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$,
- $\Psi' \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, G)$,
- $A' \in \mathcal{G}$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. \bar{A}' est réductible par Ψ' à A' ,

2. la fonction $(\Psi')^{-1}\bar{F}'\Psi'$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A', \kappa''(\epsilon^{\frac{5}{2}}), 2\gamma)$ -décomposition \mathcal{L}''

3. pour tout $s \leq r'$, $|\Psi'|_s \leq (\frac{1}{\epsilon^{\frac{5}{2}}})^{\frac{1}{96}}$ et $|(\Psi')^{-1}|_s \leq (\frac{1}{\epsilon^{\frac{5}{2}}})^{\frac{1}{96}}$,

4.

$$\partial_\omega Z' = (\bar{A} + \bar{F})Z' - Z'(\bar{A}' + \bar{F}') \quad (86)$$

5. $\|A'\| \leq \|A\| + \epsilon^{\frac{11}{12}} + 8\pi N$;

6.

$$|Z' - Id|_{r'} \leq \frac{1}{\tilde{C}'} \left(\frac{2(1 + \|A\|)|\log \epsilon|}{r - r'} \right)^{D_1 \gamma} \epsilon^{\frac{5}{6}} \quad (87)$$

et

$$|(Z')^{-1} - Id|_{r'} \leq \frac{1}{\tilde{C}'} \left(\frac{2(1 + \|A\|)|\log \epsilon|}{r - r'} \right)^{D_1 \gamma} \epsilon^{\frac{5}{6}} \quad (88)$$

7. $|\bar{F}'|_{r'} \leq \epsilon^{\frac{5}{2}}$,

8. la fonction $\Psi'^{-1}\Psi$ est triviale par rapport à $\mathcal{L}_{A, \kappa''}$.

De plus, en dimension 2, si \bar{A}, \bar{F} sont continus sur \mathbb{T}^d , que l'hypothèse 3 est remplacée par

3' pour toute fonction H continue sur \mathbb{T}^d , $\Psi H \Psi^{-1}$ est continue sur \mathbb{T}^d

alors Z', \bar{A}', \bar{F}' sont continus sur \mathbb{T}^d et la propriété 2 est remplacée par

2' pour toute fonction H continue sur \mathbb{T}^d , $\Psi' H (\Psi')^{-1}$ est continue sur \mathbb{T}^d .

Enfin, si $\mathcal{G} = gl(n, \mathbb{C})$ ou $u(n)$ et si \bar{A}, \bar{F}, Ψ sont continus sur \mathbb{T}^d , alors $Z', \bar{A}', \bar{F}', \Psi'$ sont continus sur \mathbb{T}^d .

Démonstration: • Vérifions d'abord que l'on peut appliquer la proposition 6.5 avec

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon; \quad \tilde{r} = r; \quad \kappa' = \kappa''; \quad \tilde{N} = N; \quad (89)$$

Soit Φ une renormalisation de A d'ordre N et $\tilde{A} \in \mathcal{G}$ telle que

$$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d, \quad \partial_\omega \Phi(\theta) = A\Phi(\theta) - \Phi(\theta)\tilde{A} \quad (90)$$

Posons $\Psi' = \Psi\Phi$ et soit

$$\tilde{F} := (\Psi')^{-1}\bar{F}\Psi'$$

- La matrice \tilde{A} a donc un spectre $DC_\omega^N(\kappa'', \tau)$ et la première hypothèse de 6.5 est vérifiée.
- Par hypothèse, $\Psi^{-1}\bar{F}\Psi$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une (A, κ'', γ) -décomposition \mathcal{L} et une certaine famille (m_L) . Par ailleurs Φ est triviale par rapport à

$\mathcal{L}_{A,\kappa''}$. Comme \mathcal{L} et $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$ sont des A -décompositions, on peut définir une A -décomposition $\bar{\mathcal{L}}$ de la manière suivante :

$$L \in \bar{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \exists L_1 \in \mathcal{L}, L_2 \in \mathcal{L}_{A,\kappa''} \mid L = L_1 \cap L_2 \quad (91)$$

$\bar{\mathcal{L}}$ est une $(A, \frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$ -décomposition car \mathcal{L} et $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$ sont des (A, κ'', γ) -décompositions et donc

$$\|P_L^{\bar{\mathcal{L}}}\| = \|P_{L_1}^{\mathcal{L}} P_{L_2}^{\mathcal{L}_{A,\kappa''}}\| \leq C_0^2 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa''} \right)^{2\gamma} \quad (92)$$

De plus, \tilde{F} a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\bar{\mathcal{L}}$. Comme $\bar{\mathcal{L}}$ est une $(A, \frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$ -décomposition, c'est aussi une $(\tilde{A}, \frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$ -décomposition (puisque A et \tilde{A} ont la même partie nilpotente) et donc la troisième hypothèse de 6.5 est vérifiée.

De plus,

$$\|\hat{\tilde{F}}(0)\| \leq |\tilde{F}|_0 \leq |\Phi|_0 |\Phi^{-1}|_0 |\Psi|_0 |\Psi^{-1}|_0 |\bar{F}|_0 \quad (93)$$

Or d'après (22), pour tout $s' \geq 0$,

$$\|\Phi\|_{s'} \leq n C C_0 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa''} \right)^{n(n+1)} e^{4\pi N s'^2} \quad (94)$$

où C ne dépend que de n, d . L'hypothèse (84), avec \tilde{C}' assez petit et D_1 assez grand, et le fait que $\|A_{\mathcal{N}}\| \leq \|A\|$, impliquent alors que pour tout $s' \leq r$,

$$\|\Phi\|_{s'} \leq \epsilon^{-\frac{1}{96}} e^{4\pi N s'^2} \quad (95)$$

donc pour $r' = \frac{1}{|\log \epsilon|^2}$,

$$\|\Phi\|_{3r'} \leq \epsilon^{-\frac{1}{96}} e^{36\pi N r'^2} \quad (96)$$

et donc

$$\|\Psi\Phi\|_{3r'} \leq \|\Psi\|_{3r'} \|\Phi\|_{3r'} \leq \epsilon^{-\frac{1}{48}} e^{36\pi r'^2 N} \leq c \epsilon^{-\frac{1}{48}} \leq \epsilon^{-\frac{1}{40}} \quad (97)$$

où c ne dépend que de d , et de même pour Φ^{-1} (d'où la propriété 3). Donc

$$\|\hat{\tilde{F}}(0)\| \leq \epsilon^{1-2(r-r')} C_0^2 \left(\frac{1 + \|A_{\mathcal{N}}\|}{\kappa''} \right)^{2n(n+1)} \quad (98)$$

d'où

$$||\hat{\tilde{F}}(0)|| \leq \epsilon^{1-2(r-r')-\frac{1}{48}} \quad (99)$$

Soit C', D donnés par la proposition 6.5 (ne dépendant donc que de n, d et de τ). L'hypothèse (84), qui implique (71) avec

$$\tilde{C}' \leq C'^4, \quad D_1\gamma \geq 64n(n-1)+2\tau \quad (100)$$

et l'expression (82) qui implique (72), permettent donc de satisfaire la deuxième hypothèse de la proposition 6.5.

• On obtient ainsi des fonctions $X \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$, $F' \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, G)$, et une matrice $A' \in \mathcal{G}$ telles que

- A' a un spectre $DC_\omega^N(\frac{3}{4}(\frac{\kappa''}{C_0}), \tau)$,
-

$$||A' - \tilde{A}|| \leq \epsilon^{\frac{23}{24}} \quad (101)$$

- $\partial_\omega e^X = (\tilde{A} + \tilde{F})e^X - e^X(A' + F')$,
- F' a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A', \frac{3\kappa''}{4C_0}, 2\gamma)$ -décomposition \mathcal{L}'
- pour tout $s \leq r$,

$$|X|_s \leq C' \left(\frac{C_0(1 + ||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''(r-s)} \right)^{D\gamma} |\tilde{F}|_r \quad (102)$$

et pour tout $s \leq \frac{r}{2}$,

$$|F'|_s \leq C' e^{|X|_s} |\tilde{F}|_r (N^d e^{-\sqrt[4]{N}} + \left(\frac{2C_0(1 + ||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''s} \right)^{D\gamma} |\tilde{F}|_r (1 + e^{|X|_s})) \quad (103)$$

Par hypothèse, $2r' \leq \frac{r}{2}$ donc $X, F' \in C_{2r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$.

• Montrons maintenant les estimations qui nous permettrons de réitérer la proposition 6.5. D'après (103), où l'on a pris $s = 2r' \leq \frac{r}{2}$,

$$|F'|_{2r'} \leq C' e^{|X|_{2r'}} |\tilde{F}|_{3r'} (N^d e^{-\sqrt[4]{N}} + \left(\frac{C_0(1 + ||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''r'} \right)^{D\gamma} |\tilde{F}|_{3r'} (1 + e^{|X|_{2r'}})) \quad (104)$$

Or

$$|\tilde{F}|_{3r'} \leq |\Psi'|_{3r'} |\Psi'^{-1}|_{3r'} |\bar{F}|_r \leq \epsilon^{1-\frac{1}{20}} \quad (105)$$

et d'après (102) avec $s = 2r'$,

$$|X|_{2r'} \leq C' \left(\frac{C_0(1 + \|A_{\mathcal{N}}\|)}{\kappa'' r'} \right)^{D\gamma} |\tilde{F}|_{3r'} \quad (102)$$

donc d'après (84), si \tilde{C}' est assez petit et D_1 assez grand en fonction de n, D, C' , alors

$$|X|_{2r'} \leq \epsilon^{\frac{5}{6}} \quad (106)$$

donc

$$e^{|X|_{2r'}} \leq 2 \quad (107)$$

donc par l'hypothèse (84),

$$|F'|_{2r'} \leq 2C' \epsilon^{\frac{19}{20}} (N^d \epsilon + 3\epsilon^{\frac{19}{20}}) \quad (108)$$

Il existe une constante c_d ne dépendant que de d telle que si $\epsilon \leq c_d$, alors

$$|\log \epsilon|^d \leq \epsilon^{\frac{1}{96}} \quad (109)$$

et dans ce cas,

$$|F'|_{2r'} \leq \epsilon^{\frac{9}{5}} \quad (110)$$

• Nous pouvons donc appliquer à nouveau la proposition 6.5 avec

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon^{\frac{9}{5}}; \quad \tilde{r} = 2r'; \quad \kappa' = \frac{3}{4}\kappa''; \quad \tilde{N} = N; \quad \tilde{A} = A'; \quad \tilde{F} = F'; \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}'. \quad (111)$$

Soient $A'' \in \mathcal{G}$, $F'' \in C_{r'}^{\omega}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$, $\mathcal{L}'', X'' \in C_{r'}^{\omega}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ tels que

- A'' a un spectre $DC_{\omega}^N(\frac{9}{32}\kappa'', \tau$,
- $\|A'' - A'\| \leq \epsilon^{\frac{9}{5}}$,
- $\partial_{\omega} e^{X''} = (A' + F')e^{X''} - e^{X''}(A'' + F'')$,
- F'' a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A'', \frac{9}{32}\kappa''(\epsilon), 2\gamma)$ -décomposition \mathcal{L}'' ,

$$|X''|_{r'} \leq C' \left(\frac{3C_0(1 + \|A_{\mathcal{N}}\|)}{\kappa'' r'} \right)^{D\gamma} |F'|_{2r'} \leq \epsilon^{\frac{8}{5}} \quad (112)$$

– et

$$|F''|_{r'} \leq C' e^{|X''|_{r'}} |F'|_{2r'} (N^d e^{-\sqrt[4]{N}} + \left(\frac{C_0(1 + \|A_{\mathcal{N}}\|)}{\kappa'' r'} \right)^{D\gamma} |F'|_{2r'} (1 + e^{|X''|_{r'}})) \quad (113)$$

Posons $Z' = \Psi' e^X e^{X''} \Psi'^{-1}$, $\bar{A}' = (\partial_\omega \Psi' + \Psi' A'') \Psi'^{-1}$, $\bar{F}' = \Psi' F'' \Psi'^{-1}$.

• (113) implique que

$$|F''|_{r'} \leq 2C' \epsilon^{\frac{9}{5}} (\epsilon^{\frac{11}{12}} + \epsilon^{\frac{8}{5}}) \leq \epsilon^3 \quad (114)$$

et finalement

$$|\Psi' F'' \Psi'^{-1}|_{r'} \leq \epsilon^{\frac{5}{2}} \quad (115)$$

d'où 7.

• Vérifions que \mathcal{L}' est une $(A'', \kappa''(\epsilon^{\frac{5}{2}}), 2\gamma)$ -décomposition. Il suffit de vérifier que

$$\frac{9\kappa''(\epsilon)}{32} \geq \kappa''(\epsilon^{\frac{5}{2}}) \quad (116)$$

c'est-à-dire

$$\frac{9\kappa}{32(9n(4ed)^2 |\log \epsilon|^4)^\tau} \geq \kappa''(\epsilon^{\frac{5}{2}}) = \frac{\kappa}{(9nN(\epsilon^{\frac{5}{2}}))^\tau} = \frac{\kappa}{(9n(4ed)^2 |\log \epsilon^{\frac{5}{2}}|^4)^\tau} \quad (117)$$

ou encore

$$\frac{9}{32} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{4\tau} \quad (118)$$

ce qui est vrai puisque $\tau \geq 1$, d'où 2.

• Nous allons estimer $|\Psi \Phi e^X e^{X''} (\Psi \Phi)^{-1} - Id|_{r'}$. On a

$$|e^X e^{X''} - Id|_{r'} = |e^X (e^{X''} - e^{-X})|_{r'} \leq 2(|e^X - Id|_{r'} + |e^{X''} - Id|_{r'}) \quad (119)$$

et de plus

$$\begin{aligned} |e^X - Id|_{r'} &\leq C' \left(\frac{2C_0(1 + \|A_{\mathcal{N}}\|)}{\kappa''(\epsilon) r'} \right)^{D\gamma} |\tilde{F}|_r \\ &\leq C'' \left(\frac{2C_0(1 + \|A_{\mathcal{N}}\|) N(\epsilon)^\tau}{\kappa r'} \right)^{D\gamma} |\tilde{F}|_r \end{aligned} \quad (120)$$

pour un certain C'' ne dépendant que de n, d, κ, τ , et de même pour $|e^{X''} - Id|_{r'}$. Donc

$$|\Psi\Phi e^X e^{X''}(\Psi\Phi)^{-1} - Id|_{r'} \leq 4C'' \left(\frac{2C_0(1 + \|A_{\mathcal{N}}\|)N(\epsilon)^\tau}{\kappa r} \right)^{D_1\gamma} \epsilon^{\frac{9}{10}} \quad (121)$$

c'est-à-dire

$$|\Psi\Phi e^X e^{X''}(\Psi\Phi)^{-1} - Id|_{r'} \leq C_3 \left(\frac{2(1 + \|A_{\mathcal{N}}\|)|\log \epsilon|}{\kappa r} \right)^{D_1'\gamma} \epsilon^{\frac{9}{10}} \quad (122)$$

pour un certain C_3 ne dépendant que de n, d, κ, τ et D_1' ne dépendant que de n, d, τ . On obtient la même estimation pour $|\Psi\Phi e^{-X''} e^{-X}(\Psi\Phi)^{-1} - Id|_{r'}$, donc la propriété 6 est vérifiée avec \tilde{C}' assez petit et D_1 assez grand en fonction de n, d, κ, τ .

• De plus,

$$\|A''\| \leq \|A'' - A'\| + \|A' - A\| + \|A\| \leq \|A\| + \epsilon^{\frac{11}{12}} + 8\pi N \quad (123)$$

d'où la propriété 5.

6.3.1 Cas de la dimension 2

En dimension 2, comme par hypothèse $\Psi^{-1}\bar{F}\Psi$ est continue sur \mathbb{T}^d , et par construction de Φ , alors \bar{F}, X et F' sont continues sur \mathbb{T}^d .

Donc les fonctions $\Phi F' \Phi^{-1}$, $\Phi \hat{\bar{F}}(0) \Phi^{-1}$ et $\Phi X \Phi^{-1}$ sont continues sur \mathbb{T}^d , et par hypothèse sur Ψ , alors $\Psi \Phi F' (\Psi \Phi)^{-1}$, $\Psi \Phi \hat{\bar{F}}(0) (\Psi \Phi)^{-1}$ et $\Psi \Phi X (\Psi \Phi)^{-1}$ sont donc continues sur \mathbb{T}^d et donc $\bar{A}' = \bar{A} + \Psi \Phi \hat{\bar{F}}(0) (\Psi \Phi)^{-1}$ est continue sur \mathbb{T}^d .

Il ne reste qu'à vérifier que pour toute fonction H continue sur \mathbb{T}^d , la fonction $(\Psi \Phi)^{-1} H \Psi \Phi$ est continue sur \mathbb{T}^d . Mais

$$(\Psi \Phi)^{-1} H \Psi \Phi = \Phi^{-1} \Psi^{-1} H \Psi \Phi$$

Par hypothèse, $\Psi^{-1} H \Psi$ est continue sur \mathbb{T}^d , et donc $\Phi^{-1} \Psi^{-1} H \Psi \Phi$ aussi. \square

7 Itération

Lemme 7.1 *Soit $C' \leq 1, b_0 > 0, \tau \geq 1$. Soit $D_2, \gamma_0 \in \mathbb{N}$. Il existe C ne dépendant que de C', D_2, γ_0, τ tel que pour tout*

$$\epsilon \leq C \left(\frac{1}{b_0 + 1} \right)^{16\gamma_0 D_2} \quad (124)$$

et en posant pour tout k

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_k = \epsilon_0^{(\frac{5}{2})^k} \\ \gamma_k = 2^k \gamma_0 \\ r_k = \frac{1}{|\log \epsilon_{k-1}|^2} \\ b_k := b_{k-1} + \frac{1}{C'} |\log \epsilon_{k-1}|^4 \\ \kappa_k = \frac{C'}{|\log \epsilon_k|^{4\tau}} \end{array} \right. \quad (125)$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{4}{r_k} \leq |\log \epsilon_k|^2 \quad (126)$$

et

$$a_k := \left(\frac{b_k + 1}{\kappa_k r_{k+1}} \right)^{D_2 \gamma_k} \epsilon_k \leq C' \quad (127)$$

Démonstration: La propriété (126) est évidente.
(127) est vraie si

$$\left(\frac{2(1 + b_0) |\log \epsilon_0|^{10\tau} \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{5}{2})^{j+2k}}{C'^2} \right)^{2^k D_2 \gamma_0} \epsilon_0^{(\frac{5}{2})^k} \leq C' \quad (128)$$

et il suffit pour cela que

$$\left(\frac{2(1 + b_0) |\log \epsilon_0|^{10\tau} (\frac{5}{2})^{4k}}{C'^2} \right)^{D_2 \gamma_0} \epsilon_0^{(\frac{5}{4})^k} \leq C' \quad (129)$$

ce qui est vrai pour tout k si ϵ_0 est assez petit pour que

$$(5(1 + b_0))^{D_2 \gamma_0} |\log \epsilon_0|^{80\tau D_2 \gamma_0} \epsilon_0 \leq C'^{16D_2 \gamma_0 + 1} \quad \square \quad (130)$$

Théorème 7.2 Soit $r \leq 1, A \in \mathcal{G}$ et $F \in C_r^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ avec de bonnes propriétés de périodicité par rapport à \mathcal{L}_A .

Il existe C ne dépendant que de n, d, τ, κ et D_3 ne dépendant que de n, d, τ, κ, A tel que si

$$|F|_r \leq \epsilon'_0 = \left(\frac{C}{\|A\| + 1} \right)^{D_3} \quad (131)$$

alors pour tout $\epsilon \leq \epsilon'_0$, il existe

- $r_\epsilon > 0$,
- $Z_\epsilon \in C_{r_\epsilon}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, G)$,

- $A_\epsilon \in \mathcal{G}$,
- $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon \in C_{r_\epsilon}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$,

tels que

1. \bar{A}_ϵ est réductible à A_ϵ ,
2. $|\bar{F}_\epsilon|_{r_\epsilon} \leq \epsilon$
3. pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega Z_\epsilon(\theta) = (A + F(\theta))Z_\epsilon(\theta) - Z_\epsilon(\theta)(\bar{A}_\epsilon(\theta) + \bar{F}_\epsilon(\theta))$$

4.

$$|Z_\epsilon - Id|_{r_\epsilon} \leq 2^{D_3} \epsilon_0^{\frac{1}{4} - 4r_\epsilon}$$

et

$$|Z_\epsilon^{-1} - Id|_{r_\epsilon} \leq 2^{D_3} \epsilon_0^{\frac{1}{4} - 4r_\epsilon}$$

5. $Z_\epsilon, \partial_\omega Z_\epsilon$ sont bornées dans $C_{r_\epsilon}^\omega(2\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{C}))$ indépendamment de ϵ ;

De plus, en dimension 2 ou si $\mathcal{G} = gl(n, \mathbb{C})$ ou $u(n)$, si F est continu sur \mathbb{T}^d , alors $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon$ et Z_ϵ sont en faits continus sur \mathbb{T}^d . Si $\mathcal{G} = o(n)$ ou $u(n)$, alors D_3 est indépendant de A .

Démonstration: La preuve se fait par itération de la proposition 6.6, grâce au lemme 7.1. Soit $\gamma \geq \bar{\gamma}$ ne dépendant que de A, κ, n tel que \mathcal{L}_A soit une (A, κ, γ) -décomposition (si $\mathcal{G} = o(n)$ ou $u(n)$, on peut prendre $\gamma = \bar{\gamma}$ qui est indépendant de A). Appliquons la proposition 6.6 avec $\Psi \equiv Id$. Soient \tilde{C}', D_1 donnés par la proposition 6.6. Nous allons appliquer le lemme 7.1 avec $C' = \tilde{C}', b_0 = \|A\|, D_2 = D_1, \gamma_0 = \gamma$. Soit C donné par le lemme 7.1, $D_3 = 16\gamma_0 D_2$ et soit ϵ'_0 satisfaisant la condition (131), qui implique (124). Alors \mathcal{L}_A est en particulier une $(A, \kappa''(\epsilon'_0), \gamma)$ -décomposition et ϵ'_0 satisfait (84) et (85). On peut donc itérer la proposition 6.6 un nombre k_ϵ de fois qui est tel que

$$\epsilon_0'^{(\frac{5}{2})^{k_\epsilon}} \leq \epsilon \tag{132}$$

pour obtenir $r_\epsilon, Z_\epsilon, A_\epsilon, \bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon$ satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3, et où Z_ϵ est un produit de transformations Z_k telles que, pour tout $k \leq k_\epsilon$,

$$|Z_k - Id|_{r_\epsilon} \leq \frac{1}{\tilde{C}'} \left(\frac{2(1 + \|A\|)}{r} 5^k |\log \epsilon'_0| \right)^{D_1 \gamma} \epsilon_0'^{\frac{5}{6}(\frac{5}{2})^k} \tag{133}$$

et de même pour Z_k^{-1} . Les estimations 4 s'obtiennent par une récurrence simple et la propriété 5 se démontre par une estimation de Cauchy. \square

Comme corollaire, on obtient la quasi-densité des cocycles réductibles au voisinage d'une constante, dans la topologie Gevrey.

Corollaire 7.3 Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie parmi $gl(n, \mathbb{C}), gl(n, \mathbb{R}), sp(n, \mathbb{R}), sl(n, \mathbb{R}), o(n), u(n)$, soit $A \in \mathcal{G}$, $r \leq 1$, $F \in C_r^{G,2}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$. Il existe ϵ_0 ne dépendant que de n, d, κ, τ, A, r tel que si $\|F - A\|_r \leq \epsilon_0$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r_\epsilon > 0$ et $H \in C_{r_\epsilon}^{G,2}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ réductible tel que $\|F - H\|_{r_\epsilon} \leq \epsilon$. Si \mathcal{G} est complexe ou si $n = 2$, alors on peut supposer H défini sur \mathbb{T}^d . Si $\mathcal{G} = o(n)$ ou $u(n)$, alors ϵ_0 ne dépend pas de A .

Ceci prouve les théorèmes 1.1 et 1.2.

Références

- [1] A. Avila and R. Krikorian, *Reducibility or non-uniform hyperbolicity for quasi-periodic Schrödinger cocycles*, Annals of Mathematics 164 (2006), 911-940,
- [2] C.Chavaudret, *Reducibility of quasi-periodic cocycles in linear Lie groups*, arxiv :0810.0651
- [3] C.Chavaudret, *Almost reducibility of analytic quasi-periodic cocycles*, arxiv : 0912.4814
- [4] L.H.Eliasson, *Almost reducibility of linear quasi-periodic systems*, Proceedings of symposia in pure mathematics 69 (2001), 679-705
- [5] L.H.Eliasson, *Perturbations of linear quasi-periodic systems*, Proceedings from CIME-summer school on small divisors, Cetraro 1998
- [6] L.H. Eliasson, *Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation*, Communications in mathematical physics 146 (1992), 447-482
- [7] S. Hadj Amor, *Opérateur de Schrödinger quasi-périodique unidimensionnel*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7, 2006
- [8] Hailong He, Jiangong You, *Full-measure reducibility for generic one-parameter family of quasi-periodic linear systems*, Journal of Dynamics and Differential Equations, vol.20, n°4 (dec. 2008), 831-866
- [9] R. Krikorian, Réductibilité des systèmes produit croisé à valeurs dans des groupes compacts, *Astérisque* **259** (1999)
- [10] R.Krikorian, Réductibilité presque partout des flots fibrés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes compacts, *Annales scientifiques de l'ENS*, 4e série, vol.32, 2 (1999) 187-240
- [11] J.P.Marco, D.Sauzin, *Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable hamiltonian systems*, Publications mathématiques de l'IHES, 96 (2003), 199-275